

Precificação de opções com volatilidade estocástica

Diógenes M. L. Martin

Doutor em Finanças (EAESP-FGV) e prof. do Programa de Mestrado e Doutorado da Universidade Mackenzie.

RESUMO

Entre as suposições subjacentes do modelo Black-Scholes-Merton, as maiores polarizações empíricas são causadas por aquelas com uma volatilidade fixa do recurso subjacente. Este artigo discute as aproximações principais deste modelo.

PALAVRAS CHAVES

Modelo de Black-Scholes-Merton, Opção de Preço, Volatilidade Estocástica, Processo Estocástico, Processo ARCH, Equilíbrio Geral.

ABSTRACT

Among the underlying assumptions of the Black-Scholes option pricing model, the largest empirical biases are caused by those with a fixed volatility of the underlying asset. This article discusses the main approaches of this issue.

KEY WORDS

Black-Scholes-Merton Model, Option Pricing, Stochastic Volatility, Call Pricing, ARCH Process, Stochastic Process, General Equilibrium.

O presente artigo examina do ponto de vista teórico as principais abordagens sobre precificação de ativos derivados, quando a variância dos retornos do ativo objeto é estocástica. Na maioria dos casos, examina-se a precificação de uma opção de compra, que é um contrato no qual o comprador da opção, denominado titular da opção, compra do vendedor, denominado lançador da opção, o direito de comprar um ativo objeto (por exemplo uma ação ou uma casa) por um preço pré-estabelecido, denominado preço de exercício, mediante o pagamento do valor da opção ou sinal. No caso em questão analisou-se a literatura sobre opções financeiras.

Black-Scholes (B/S) (1973) e Merton (M) (1973a) foram os primeiros a formular um modelo para a precificação de ativos derivados (no caso, opções de compra do tipo europeu) em um contexto de equilíbrio geral em tempo contínuo, cuja solução é analítica ou “quase analítica”. O problema por eles formulado resultou em uma equação diferencial parabólica de segundo grau, tendo como referência a equação das trocas de calor, cuja solução foi dada por Churchill em 1963. Este modelo é aplicável a outros tipos de ativos derivados, (contratos a termo, contratos futuros, opções sobre índices, opções sobre moeda, opções sobre taxa de juros).

As várias tentativas anteriores haviam falhado porque a precificação do ativo derivado ficava dependendo de um ou mais parâmetros arbitrários que tentavam traduzir as preferências do investidor em relação ao risco. Percebendo tal deficiência, Black e Scholes reconheceram, ao incorporarem o argumento de Merton, que em equilíbrio o retorno de uma carteira sem risco (“riskless hedge portfolio”) deveria corresponder à taxa livre de risco, para impedir a existência de oportunidades de arbitragem. Esta foi a constatação essencial que permitiu a obtenção de uma equação diferencial cuja solução era conhecida (equação das trocas de calor). B/S reproduziram um procedimento de formação de carteiras utilizado por Thorp e Kassouf (1967) para a obtenção da carteira equivalente, ou seja, uma quantidade de ações e títulos sem risco, com possibilidade de ajuste contínuo dos mesmos, cuja soma equivale ao valor da opção. Cumpre ressaltar, entretanto, o trabalho pioneiro de Bachelier, que em sua tese de doutorado de 1900, ao examinar o movimento de preços especulativos, desenvolveu um modelo semelhante em vários aspectos ao de Black e Scholes, porém admitindo que o preço das ações obedecia a um movimento browniano aritmético.

B/S, originalmente, supuseram as seguintes condições ideais quanto aos mercados de ações e opções:

1) a taxa de juros de curto prazo é conhecida e constante ao longo do tempo. Considerando a condição de neutralidade ao risco e equilíbrio de preços, a taxa de juros de curto prazo deve ser igual à taxa livre de risco;

2) o preço da ação obedece a um passeio aleatório em tempo contínuo com variância instantânea proporcional ao preço da ação. Portanto, a distribuição dos possíveis preços da ação ao final de qualquer intervalo é lognormal, com variância constante;

3) a ação não paga dividendos ou faz qualquer outra distribuição;

4) a opção de compra é do tipo europeu;

5) os custos de transação são inexistentes e as negociações ocorrem em tempo contínuo;

6) a taxa para emprestar ou tomar emprestado é a mesma;

7) os títulos são perfeitamente divisíveis e não existem restrições à venda a descoberto.

Para uma explicação detalhada dessas hipóteses sugere-se a leitura de Sanvicente (1983) e das observações feitas por Merton (1973a) e Smith (1976). A hipótese 1 pode ser relaxada, supondo-se alternativamente que a taxa de juros é determinística. Quanto à hipótese 3, Merton (1973a) obteve um modelo incorporando tal restrição. As hipóteses 5, 6 e 7 referem-se à condição de mercado perfeito e inserem-se no contexto de equilíbrio geral. A hipótese 4 pode igualmente ser relaxada para abranger a opção de compra do tipo americano. Entretanto, a hipótese 2 é essencial ao modelo, admitindo-se alternativamente apenas que a variância possa ser determinística; ou seja, o preço da ação obedeceria a um processo de difusão do tipo Ito, em tempo contínuo, com variância constante ou determinística.

O tema precificação de ativos derivados, quando a variância dos retornos do ativo objeto é estocástica, e por consequência qualquer precificação que envolva uma solução numérica, implica necessariamente um domínio teórico multidisciplinar, a saber, conhecimento quanto a: (1) matemática e estatística: equações diferenciais parciais (EDP), processos e controles estocásticos, cálculo estocástico e estimação de modelos ARCH e equações diferenciais estocásticas (EDE); (2) matemática aplicada: programação para a solução das EDP's e EDE's; (3) "financial-economics", em especial a teoria de opções. Creio que de forma mais próxima e geral estes seriam os

conhecimentos exigidos, ainda que não muito profundos, com exceção da teoria de finanças.

Dado que se constata um viés correspondente à diferença entre o prêmio observado no pregão e o prêmio teórico, dado pelo modelo Black-Scholes, poder-se-ia fazer as seguintes indagações sobre as origens e causas do viés:

1) existência ou não do viés;

2) se o viés decorre da falta de eficiência de mercado:

2.a) eficiência quanto à informação (forte, semi-forte e fraca);

2.b) eficiência quanto à avaliação (valor intrínseco da ação);

2.c) eficiência quanto ao número de ativos (mercados completos ou não);

2.d) eficiência operacional;

3) se o viés decorre de anomalias de mercado:

3.a) anomalias de mercado relacionadas a sazonalidades ou ao funcionamento dos mercados:

3.a.1) efeito fim de semana;

3.a.2) efeito feriado;

3.a.3) efeito virada do mês;

3.a.4) efeito compensação;

3.a.5) efeito janeiro;

3.b) anomalias de mercado relacionadas com o tamanho da empresa e a sua estrutura de capital;

4) se o viés decorre da estrutura matemática da fórmula;

5) se o viés decorre do grau de realismo das premissas do modelo e da violação de alguns de seus pressupostos fundamentais:

5.a) mercados sem atrito;

5.b) dinâmica do preço da ação objeto;

5.c) dinâmica da taxa de retorno do ativo sem risco;

5.d) preferências e expectativas dos agentes econômicos;

6) se o viés decorre, no caso da variância, da natureza do estimador empregado:

6.a) variância condicionada;

6.b) variância não condicionada;

7) admitindo-se como causa a volatilidade, tem-se os seguintes modelos de estimação da variância estocástica:

- 7.a) modelos ARCH (“Autoregressive Conditional Heterokedastic Models”);
- 7.b) modelos S. V. (“Stochastic Variance Models”);

8) como origens da volatilidade estocástica, sob o contexto da teoria da informação, tem-se que:

- 8.a) a volatilidade é resultante do fluxo de informação pública, normalmente mais intenso durante os pregões;
- 8.b) a volatilidade é resultante do fluxo de informação privada dos “traders” durante o pregão;
- 8.c) a volatilidade é resultante de ruído (negociação desprovida de informação) durante o pregão;

9) a existência de mercados especulativos resulta em um perfil da distribuição de retornos com elevado grau de curtose e com caudas grossas, que podem ser explicadas pelas seguintes teorias:

- 9.a) distribuição Pareto-Levy;
- 9.b) mistura de distribuições normais;
- 9.c) eventos compostos;

10) Madan e Seneta (1990) e Heston (1993) demonstraram que volatilidade estocástica e a correlação entre retornos e volatilidade determinam o perfil da distribuição final de retornos.

A seguir, comenta-se cada um dos itens acima mencionados.

1) Sobre a existência do viés tem-se os estudos de Black e Scholes (1973), Macbeth e Merville (1979), Whaley (1982) e Rubinstein (1985). Os resultados desses estudos pareciam ser bastante discrepantes quanto à existência de um determinado tipo de viés, porém foram unânimes em constatá-lo. Cumpre observar que os modelos anteriores ao da volatilidade estocástica não conseguiram explicar a natureza e o sentido do viés. Assim houve: modelos que admitiam a quebra da hipótese de volatilidade constante (modelo de difusão com elasticidade constante da variância (Cox-Ross (1976)), modelo de difusão de opções compostas (Geske (1979)), modelo de difusão de deslocamento-(Rubinstein (1983)), e modelos que admitiam a quebra da hipótese de continuidade da trajetória de preços da ação (modelo de salto puro (Cox-Ross (1975)), e modelo de salto e difusão (Merton (1976a))). Em trabalhos mais recentes a

natureza do viés foi determinada, e resultados que antes eram considerados conflitantes foram esclarecidos. Os principais trabalhos que esclareceram a natureza do viés, admitindo como causa a volatilidade estocástica, são: Hull e White (1987), Johnson e Shanno (1987), Wiggins (1987), Louis Scott (1986), Goldenberg (1991), Stein e Stein (1991), Hofmann *et alii* (1992), Kuwahara e Marsh (1992), Amin e Ng (1993), Ball e Roma (1994) e Duan (1995).

2) Sobre a eficiência do mercado de ações, em países desenvolvidos há muito tempo existe uma extensa bibliografia. Especificamente quanto à eficiência do mercado de opções, tem-se os estudos de Black e Scholes (1973), Galai (1977), Finnerty (1978), Klemkosky e Resnick (1979), Leland (1985), Shastri e Tandon (1986) e Figlewski (1989). Os resultados desses estudos, via de regra, evidenciam que o mercado é eficiente, não havendo oportunidades de arbitragem, em especial para os “market traders”, ao se considerar os custos de transação. Entretanto, Halpern e Turnbull (1985) constataram ineficiência de mercado, mesmo com a inclusão dos custos de transação, na Toronto Stock Exchange, no período de 1978 a 1979. Todavia, vale a observação de Galai (1977) sobre o teste simultâneo de eficiência de mercado e validade do modelo Black e Scholes, que, uma vez realizado, torna difícil distinguir se o modelo é válido e/ou se o mercado é eficiente, e inversamente, se o mercado é ineficiente e/ou se o modelo é inválido.

Barone (1990) menciona a classificação de Tobin (1984), que estabelece quatro conceitos de eficiência:

- 2.a) eficiência da informação, ou seja, os preços deveriam refletir toda a informação disponível. Fama (1970) definiu os três tipos de eficiência quanto à informação: (1) eficiência na sua forma fraca, segundo a qual nenhum agente econômico poderia obter retornos extraordinários através de regras baseadas em informações históricas. As informações históricas, sejam públicas ou privadas, já estariam incorporadas à série histórica dos preços e não se prestariam à obtenção de retornos extraordinários; (2) eficiência na forma semiforte, na qual nenhum agente econômico poderia obter retornos extraordinários através de regras baseadas em qualquer informação pública disponível no momento; (3) eficiência na sua forma forte, segundo a qual nenhum agente econômico poderia obter retornos extraordinários atra-

vés de regras baseadas em qualquer informação pública ou privada disponível no momento;

- 2.b) eficiência na avaliação, ou seja, os preços de oferta das ações refletem ou deveriam refletir o valor presente dos seus rendimentos futuros (dividendos). Assim, o preço da ação deveria ter um fundamento ou um valor intrínseco. Nesse sentido, os preços deveriam refletir o resultado futuro da empresa, face às mudanças imprevistas na economia, além de refletir o resultado de fatores próprios da indústria e da empresa. Logo, as variações dos preços seriam imprevisíveis. Ocorre, porém, que não só as variações são imprevisíveis, como também de difícil explicação *a posteriori*, pois os preços são mais voláteis do que deveriam ser por esta abordagem. Uma explicação seria a existência de ruído ("noise"), resultante da atração de investidores desinformados, que obedecem a comportamentos não racionais, conforme observa Black (1980). Stein (1989) alega que os investidores agem como "bayesianos pobres", pois reagem exacerbadamente às informações ou aos ruídos mais recentes, atribuindo-lhes mais importância face a sua proximidade. Grossman e Stiglitz (1976) defendem a racionalidade dos agentes, ressaltando que, devido ao fato de haver custo de informação, alguns agentes procuram deduzir o seu conteúdo do comportamento de outros agentes em condições de obtê-la. Keynes (1936) menciona que os agentes procuram deduzir o comportamento dos demais e agem em função do que eles acreditam ser a avaliação dos outros pares. Granger e Morgenstern (1970) negam a idéia de valor intrínseco, afirmando que o valor de um bem é simplesmente o que pagam por ele. Baumol (1965) explica a resposta irracional, a certos fatos relevantes ou não, como busca desesperada de mais informação por agentes racionais;
- 2.c) mercado deve ser completo: dada a existência de n ativos, a existência de mais um não traria benefício adicional, ou seja, seria redundante, se houvesse n estados possíveis da natureza. No contexto de opções, sabe-se que seria possível formar uma carteira que replicasse os rendimentos de uma opção combinando-se um ativo de risco (ação) e um ativo

sem risco (título público). Logo, tal carteira não apresentaria qualquer risco, e a existência do ativo derivado dar-se-ia para completar o mercado. A possibilidade de se formar carteiras que diversifiquem o risco sistemático implica em mercados completos. No caso de volatilidade estocástica, o mercado está incompleto, pois há duas fontes de incerteza, dadas pelos processos Wiener do preço da ação e da sua variância, e apenas um ativo de risco, que é a própria ação. Para que o mercado fosse completo seria necessário que para cada fonte de incerteza houvesse um ativo de risco, de modo a se poder formar uma carteira equivalente, capaz de diversificar o risco sistemático (carteira com beta igual a zero);

- 2.d) eficiência operacional, ou seja, o mercado estaria organizado de tal maneira que permitiria uma alocação eficiente de recursos ao menor custo possível.
- 3) Todavia, há certas anomalias que tendem a contradizer a hipótese de eficiência de mercado e/ou a racionalidade dos agentes econômicos:
- 3.a) anomalias de mercado relacionadas com sazonalidades ou com o funcionamento dos mercados:
- 3.a.1) efeito fim de semana (French (1980)): ocorre quando os retornos na segunda-feira apresentam sistematicamente um valor inferior;
- 3.a.2) efeito feriado (Jacobs e Levy (1988)): ocorre quando, em razão da existência de feriados, se observa que os retornos às vésperas dos mesmos são maiores do que a média diária, sem que o risco associado à existência do feriado seja maior;
- 3.a.3) efeito virada do mês (Ariel (1987)): os retornos no final do mês e no início do mês subsequente são marcadamente positivos;
- 3.a.4) efeito compensação (Barone (1990)): ocorre quando, em razão das regras de compensação de cada bolsa, os aplicadores procuram concentrar as suas compras, de modo a obter o maior prazo de compensação para as suas ordens de compra, tentando auferir assim uma receita marginal maior, resultan-

te dos juros oriundos de outras aplicações intermediárias entre a ordem de compra e sua efetiva compensação;

3.a.5) efeito janeiro (Lakonishok e Smidt (1984)): as variações de preço são sistematicamente maiores durante o mês de janeiro, em relação aos demais meses do ano;

3.b) anomalias de mercado relacionadas ao tamanho da empresa e a sua estrutura de capital.

4) Sobre a estrutura matemática da fórmula Black-Scholes, Bhattacharya (1980) verificou que a fórmula, em condições ideais, não exibia nenhum viés sistemático significativo, exceto para as opções "at the money" um dia antes do vencimento.

5) Sobre os pressupostos do modelo, tem-se a existência de quatro conjuntos de hipóteses, segundo Merton (1973a):

5.a) mercados sem atrito: (1) inexistência de custos de transação ou tributos diferenciados; (2) inexistência de restrições quanto à venda ou à compra a descoberto; (3) as taxas de aplicação e captação são iguais; (4) a negociação é contínua. Jarrow (1994) e Figlewski (1989) examinaram as implicações da violação desta hipótese na precificação de opções;

5.b) dinâmica, para o preço da ação, dada por uma equação estocástica diferencial do tipo Ito:

$$dS/S = a dt + s dz$$

onde $dS(t)$ representa uma variação infinitesimal no preço da ação, dt representa um período infinitesimal de tempo, a é o retorno médio instantâneo para o ativo objeto, ou seja, a taxa proporcional de variação do preço da ação por unidade de tempo, s representa a volatilidade do preço da ação, e dz é uma variável aleatória contínua com média $0dt$ e variância $1dt$ (processo de Gauss-Wiener). a pode ser uma variável aleatória; entretanto, s não pode ser aleatória, e, quando muito, pode ser uma função conhecida do tempo. Lo e Wang (1995) construíram um outro modelo, admitindo que a trajetória do preço da ação obedece a um processo Ornstein-Uhlenbeck bivariado;

5.c) dinâmica para o preço do ativo livre de risco, ou seja, a hipótese da constância da taxa de

juros; Merton (1973a) constrói outro modelo admitindo a quebra desta hipótese;

5.d) preferências e expectativas dos investidores: não se admite qualquer hipótese quanto às preferências dos investidores, exceto que são racionais. Todos os investidores concordam quanto aos valores da variância e da função distribuição de dz , muito embora possam não concordar com os valores do retorno médio instantâneo. É possível construir modelos com solução analítica violando-se quase todas as hipóteses, exceto quando a variância é estocástica. Neste caso, Heston (1993) e Stein e Stein (1991) obtiveram uma solução "quase analítica", na qual a tratabilidade matemática e a estimação dos parâmetros distanciam-se muito da concisão e robustez da fórmula Black-Scholes. Entretanto, mesmo admitindo-se volatilidade estocástica, pode-se supor uma determinada dinâmica para a volatilidade, que a longo prazo implica convergência do preço da opção para um valor médio admitido pelo modelo Black-Scholes, conforme provaram Cox, Ingersoll e Ross (1985b).

6) Admitindo-se que a variância estocástica seja uma das causas do viés, se não a principal, indagar-se-ia qual seria essa variância, se aquela calculada a partir dos dados históricos, não condicionada, ou se aquela calculada a partir de um conjunto de informações, ou seja, condicionada. Os modelos que utilizam a variância condicionada têm apresentado um desempenho superior.

7) Engle (1982) e Bollerslev (1986) introduziram uma classe de processo estocástico, denominado processo heterocedástico condicionado autoregressivo (ARCH), que permite uma estimativa mais acurada da variância, dado um conjunto de informações anteriores. Nelson (1992) demonstrou que a variância discreta pode ser estimada de forma consistente por uma média ponderada dos resíduos passados como na formulação GARCH(1,1). Admiti-se, por hipótese, que a variância condicionada é equivalente à variância estocástica.

8) French e Roll (1988) examinaram a reação dos "traders" face à existência do fluxo de informações durante os dias de atividade do pregão e durante os dias em que o pregão não funciona, e determinaram o impacto que tal situação exerce sobre a variância.

Uma fração significativa da variância diária é resultante de ruído; entretanto, os retornos durante os feriados sugerem que a informação privada é um dos fatores principais da elevada variância durante os pregões. Portanto, a existência de "noise" e do fluxo de informações privadas para os "traders" durante o pregão se afiguram como causas que determinam a oscilação da variância.

9) O desvio do preço em relação a seu valor fundamental, bem como as variações de preço, são maiores em mercados especulativos. Normalmente, nesses mercados a função distribuição dos retornos não é lognormal, apresentando um perfil leptocúrtico com caudas mais grossas. As curvas que apresentam elevado grau de curtose com caudas grossas podem ser explicadas pelos seguintes modelos:

- 9.a) Pareto estável de Mandelbrot (1963), em que os retornos obedecem a uma distribuição Pareto-Levi, e a variância se comportando como se fosse infinita;
- 9.b) mistura de distribuições normais, em que os modelos de processo subordinado podem ser considerados como oriundos desta mistura de normais, com variância finita. Nestes modelos, o subordinante é uma variável aleatória. No modelo de Madan e Seneta (1990), esta variável é a variância, que obedece a uma distribuição gama invertida. No modelo de Praetz (1972), Blattberg e Gonedes (1974), esta variável é a variância, que obedece a uma distribuição gama. No modelo de Clark (1973), esta variável é o volume de negócios, que obedece a uma distribuição lognormal. No modelo de Mandelbrot-Taylor (1967), esta variável aleatória é o número de transações por unidade de tempo, que obedece a uma distribuição Pareto estável não normal. No modelo de Kon (1984), a variância estocástica é resultado de uma mistura discreta de distribuições;
- 9.c) eventos compostos de Press (1967), em que o logaritmo dos preços obedece a uma distribuição normal composta por uma distribuição de Poisson. Entretanto, pode-se considerar este modelo como uma mistura de distribuições.

De acordo com a hipótese de mistura de distribuições, a volatilidade e o volume devem estar positivamente correlacionados, em razão da dependência

conjunta da variável subordinante: fluxo de informações. Admite-se também que os mercados emergentes tenham um perfil mais especulativo.

10) Madan e Seneta (1990) provaram que a variância estocástica, ao obedecer a uma distribuição gama, origina um perfil mais leptocúrtico na distribuição de retornos, pressupondo aversão ao risco em função de uma mudança de medida (ou seja, a probabilidade de ocorrência de um certo estado ou evento não é mais a mesma). Heston (1993) provou que volatilidade estocástica e correlação entre retornos e volatilidade determinam o perfil da distribuição final de retornos e que, se a variância estocástica obedecer a um processo de raiz quadrada, permanecerá válida a abordagem de neutralidade ao risco. Considerando, portanto, que em mercados especulativos os choques na volatilidade são mais frequentes, verifica-se se os mesmos são transitórios ou se tendem a persistir. Se os choques forem apenas transitórios, nenhum ajuste será necessário à taxa de desconto e, nesse sentido, os retornos não serão afetados pela trajetória da variância.

As principais abordagens que examinam a natureza do viés e sugeriram uma fórmula alternativa, a saber os modelos de Heston (1993), Hull e White (1987), Stein e Stein (1991) supõem a existência de um mercado completo. Ou seja, é possível a criação de uma carteira equivalente beta zero, sob a hipótese da volatilidade ser estocástica. Entretanto, em mercados especulativos, esta hipótese é inverossímil e será necessário utilizar-se de outra formulação que considere a possibilidade de criação de uma carteira beta zero em mercados especulativos ou uma técnica que permita uma proteção maior para a carteira, como por exemplo a Teoria dos Valores Extremos. Bom, mas isto já uma outra história.

BIBLIOGRAFIA

- Amin, K. I. and V. K. Ng, 1993, Option Valuation with Systematic Stochastic Volatility, *The Journal of Finance* 3, 881-910.
- Ariel, R. A., 1987, A Monthly Effect in Stock Returns, *Journal of Financial Economics*, 18, 1-14.
- Ball, C. A. and A. Roma, 1994, Stochastic Volatility Option Pricing, *Journal of Financial And Quantitative Analysis* 29, 589-607.
- Barone, E., 1990, The Italian Stock Market: Efficiency and Calendar Anomalies, *Journal of Banking and Finance* 14, 483-510.

- Baumol, W. J., 1965, The Stock Market and Economic Efficiency, Fordham University Press, New York.
- Bhattacharya, M., 1980, Empirical Properties of The Black-Scholes Formula under Ideal Conditions, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol XV, Nº 5, Dezembro 1081-1102.
- Black, F. and M. Scholes, 1973, The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy* 81, 637-659.
- Black, F., 1980, Noise, *Journal of Finance*, 3, 529-543.
- Blattberg, R. and N. Gonedes, 1974, A Comparison of Stable and Student Distribution of Statistical Models for Stock Prices, *Journal of Business* 47, 244-280.
- Bollerslev, Tim, 1986, Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, *Journal of Econometrics* 31, 307-327.
- Clark, P. K., 1973, A Subordinate Stochastic Process Model with Finite Variance for Speculative Prices, *Econometrica* 41, 135-155.
- Cox, J. and S. A. Ross, 1975, The Pricing of Options for Jump Processes, Working Paper Nº 2-75, University of Pennsylvania.
- Cox, J. and S. Ross, 1976, The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes, *Journal of Financial Economics* 3, 145-166.
- Cox, J.; J. E. Ingersoll and S. A. Ross, 1985b, A Theory of The Term Structure of Interest Rates, *Econometrica* 53, 385-407.
- Duan, J.-C., 1995, The GARCH Option Pricing Model, *Mathematical Finance*, Vol. 5, 13-32.
- Engle, R. F., 1982, Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of U. K. Inflation, *Econometrica* 50, 987-1008.
- Fama, E. F., 1970, Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work, *Journal of Finance*, 25, 383-417.
- Figlewski, S, 1989, Options Arbitrage in Imperfect Markets, *Journal of Finance*, 44, 1289-1311.
- Finnerty, Joseph E., 1978, The Chicago Board Options Exchange and Market Efficiency, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 29-38.
- French, K. R., 1980, Stock Returns and the Weekend Effect, *Journal of Financial Economics* 8, 55-69.
- French, K., and R. Roll, 1986, Stock Return Variances: The Arrival of Information and the Reaction of Traders, *Journal of Financial Economics*, 17, 5-26.
- Galai, D., 1977, Tests of Market Efficiency and the Chicago Board Options Exchange, *Journal of Business*, 50, 167-197.
- Geske, R., 1979, The Valuation of Compound Options, *Journal of Financial Economics* 7, 63-81.
- Goldenberg, D. H., 1991, A Unified Method for Pricing Options on Diffusion Processes, *Journal of Financial Economics*, 29, 3-34.
- Granger, C. W. J. and O. Morgenstern, 1970, Predictability of Stock Market Prices, Heath Lexington Books, Lexington, MA.
- Grossman, T. and J. E. Stiglitz, 1976, Information and Competitive Price Systems, *American Economic Review* 66, Nº 2, 246-253.
- Halpern, Paul J. and Stuart M Turnbull, 1985, Empirical Tests of Boundary Conditions for Toronto Stock Exchange Options, *Journal of Finance*, 40, 481-500.
- Heston, S. L., 1993, A Closed Form Solution for Options with Stochastic Volatility With Applications to Bond and Currency Options, *Review of Financial Studies* 6, 327-343.
- Hofmann, N., E. Platen and M. Schweizer, 1992, Option Pricing under Incompleteness and Stochastic Volatility, *Mathematical Finance* 2, 153-187.
- Hull, J. and A. White, 1987, The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities, *Journal of Finance* 42, 281-300.
- Jacobs, B. I. and K. N. Levy, 1988, Calendar Anomalies: Abnormal Returns at Calendar Turning Points, *Financial Analysts Journal* 44, Nº 6, 28-39.
- Jarrow, R. A., 1994, Derivative Security Markets, Market Manipulation, and Option Pricing Theory, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 29, 2, 241-261.
- Jarrow, R. and A. Rudd, 1982, Approximate Option Valuation for Arbitrary Stochastic Processes, *Journal of Financial Economics* 10, 347-369.
- Johnson, H. and D. Shanno, 1987, Option Pricing when the Variance is Changing, Working Paper 85-07 (Graduate School of Administration, University of California, Davis, CA).
- Keynes, J. M., 1936, The General Theory of Employment, Interest and Money, The Collected Writings of John Maynard Keynes, Vol. 7, Macmillan St. Martin's Press.
- Klemkosky, R. C., and B. G. Resnick, 1979, Put-Call Parity and Market Efficiency, *Journal of Finance*, 34, 1141-1155.
- Kon, S., 1984, Models of Stock Returns: A Comparison, *Journal of Finance* 39, 147-165.
- Kuwahara, H. and T. Marsh, 1992, The Pricing of Japanese Equity Warrants, *Management Science* 38, 1610-1641.
- Lakonishok, J. and S. Smidt, 1984, Volume, Price and Rate of Return for Active and Inactive Stocks with Applications to Turn-of-the-Year Behavior, *Journal of Financial Economics* 13, 435-455.
- Leland, H., 1985, Option Pricing and Replication with Transactions Costs, *Journal of Finance*, 40, 1283-1301.

- Lo, A. W. and Jiang Wang, 1995, Implementing Option Pricing Models When Asset Returns Are Predictable, *Journal of Finance* 50,1, 87-127.
- Macbeth, J. and L. Merville, 1979, An Empirical Examination of the Black-Scholes Call Option Pricing Model, *Journal of Finance* 34, 1173-86.
- Madan D. B. and Seneta E., 1990, The Variance Gamma (V.G.) Model for Share Market Returns, *Journal of Business*, 63, N° 4, 511-524.
- Mandelbrot, B., 1963, The Variation of Certain Speculative Prices, *Journal of Business* 36, 394-419.
- Mandelbrot, B., and Taylor, 1967, The Variation of some other Speculative Prices, *Journal of Business*, 40, 393-413.
- Merton R. C., 1973a, The Theory of Rational Option Pricing, *Bell Journal of Economics and Management Science* 4, 141-83.
- Merton, R. C., 1976a, An Intertemporal Capital Asset Pricing Model, *Econometrica* 41, 867-888.
- Nelson, Daniel B, 1992, Filtering and Forecasting with Misspecified ARCH Models I: Getting the Right Variance With the Wrong Model, *Journal of Econometrics*, 52.
- Praetz, P. D., 1972, The Distribution of Share Price Changes, *Journal of Business*, 45, 49-55.
- Press, S. J., 1967, A Compound Events Model for Security Price, *Journal of Business* 40, 317-335.
- Rubinstein, Mark, 1983, Displaced Diffusion Option Pricing, *Journal of Finance*, 38, 213-217.
- Rubinstein, Mark, 1985, Nonparametric Tests of Alternative Option Pricing Models Using All Reported Trades and Quotes on the 30 Most Active CBOE Option Classes, *Journal of Finance* 40, 455-80.
- Sanvicente, A. Z., 1983, Avaliação de Opções de Compra de Ações em Condições de Incerteza sobre a Taxa de Juros de Mercado Aberto, Tese de Livre Docência, FEA-USP.
- Scott, L. O., 1986, Option Pricing When the Variance Changes Randomly: Theory, Estimation and an Application, Working Paper 1249, University of Illinois-Urbana.
- Shastri K., and K. Tandon, 1986, Valuation of Foreign Currency Options: Some Empirical Tests, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 21, 145-160.
- Smith Jr., C. S., 1976, Option Pricing: A Review, *Journal of Financial Economics* 3, 3-51.
- Stein, E. M., and J. C. Stein, 1991, Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: An Analytic Approach, *Review of Financial Studies* 4, 727-752.
- Stein, J., 1989, Overreactions In The Options Market, *Journal of Finance*, 44, 1011-1023.
- Thorpe, E. O. and S. T. Kassouf, 1967, *Beat the Market: A Scientific Stock Market System*. (Random House, New York).
- Tobin, J., 1984, On the Efficiency of The Financial System, *Lloyds Bank Review* 153, 1-15.
- Whaley, R., 1982, Valuation of American Call Options on Dividend-Paying Stocks: Empirical Tests, *Journal of Financial Economics*, 10, 29-58.
- Wiggins, J. B., 1987, Option Value under Stochastic Volatility: Theory and Empirical Estimates, *Journal of Financial Economics*, 19, 351-372.